

UNIVERZITET CRNE GORE

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

Elektromagnetika

1.1 Stacionarno magnetno polje

1.1.1 Opšte jednačine

Jednačine stacionarnog magnetnog polja u diferencijalnoj odnosno integralnoj formi glase

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad \text{odnosno} \quad \oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{ob} = \int_{S_c} \vec{J} d\vec{S} ; \quad \vec{J} \neq \vec{J}(t) = const \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

Međutim, iako je u principu raspodjela polja data ovim jednačinama, ipak se za određivanje distribucije polja mnogo češće koristi (i opštija je) primjena vektora \vec{A} , tj primjena magnetnog vektor potencijala; pri tome je

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3)$$

Iz pomenutog poglavlja slijede i ove relacije

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad \text{odnosno} \quad (4)$$

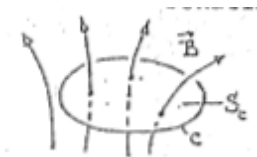
$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}, \quad \text{kao i relacija} \quad (5)$$

$$\text{div } \vec{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \psi^0}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Sve navedene relacije se odnose na specijalan slučaj – slučaj stacionarnog magnetnog polja.

Gornje relacije nam omogućavaju izračunavanje vektora \vec{A} bilo iz diferencijalne jednačine, bilo iz integralne relacije. Nalaženjem vektora \vec{A} lako se nalazi indukcija \vec{B} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), a zatim i polje \vec{H} . (intenzitet vektora \vec{A} srazmjernan je sa $\frac{1}{r}$, dok su B i H srazmjerni sa $\frac{1}{r^2}$.)

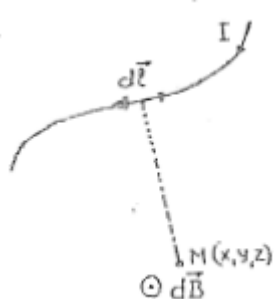
Pokažimo kako uvođenje funkcije \vec{A} omogućava da se brzo nađe fluks Φ .



$$\Phi = \int_{S_c} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_c} \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{l} \quad (7)$$

Dakle, fluks se nalazi kao cirkulacija vektora \vec{A} .

Primjer. Izvođenje Laplasovog obrasca za indukciju strujnog elementa.



Neka je zadat linijski provodnik (kojim teče struja I) proizvoljne dužine i proizvoljnog oblika. Uočimo njegov element $d\vec{l}$ i izračunajmo vrijednost polja B u nekoj proizvoljnoj tački $M(x, y, z)$ koja se nalazi na rastojanju r od uočenog elementa.

$$d\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r} \quad (8)$$

(\vec{A} je kolinearan sa $d\vec{l}$ koji ga stvara)

$$d\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{d\vec{l}}{r} \right) \quad (9)$$

($\text{rot}(a \cdot \vec{b}) = a \cdot \text{rot } \vec{b} + \text{grad } a \times \vec{b}$.); $a = \frac{1}{r}$, $\vec{b} = d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \text{rot } d\vec{l} + \text{grad } \frac{1}{r} \times d\vec{l} \right] \quad (10)$$

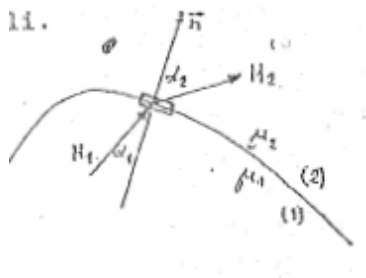
$$\text{rot } d\vec{l} = 0, \text{ jer je } d\vec{l} \text{ konstantan vektor} \quad (11)$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (12)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \times d\vec{l} \right) = \frac{\mu I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (13)$$

1.1.2 Metod ogledanja

Razmotrimo granične uslove da bismo krajnji rezultat prodiskutovali.



$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (14)$$

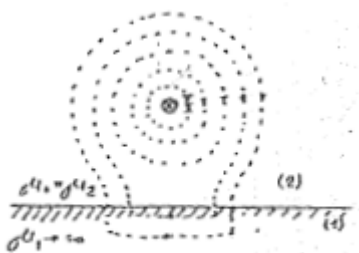
$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = 0 \Rightarrow H_{1t} = H_{2t} \quad (15)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (16)$$

Pretpostavimo da prva sredina ima visoku permeabilnost ($\mu_1 \rightarrow \infty$), a da je za drugu sredinu $\mu_{r2} = 1$, pa je

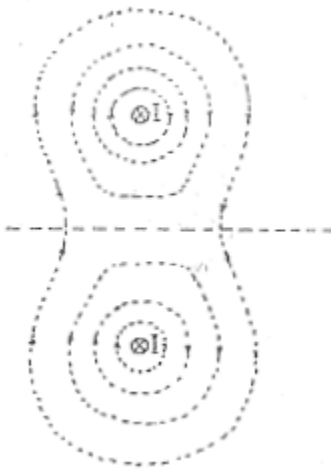
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \rightarrow 0, \text{ te i } \alpha_2 \rightarrow 0! \quad (17)$$

Dakle, iz dobrog magnetika u slabi magnetik, linije polja izlaze pod pravim uglom (na primjer, iz nekog feromagnetika u vazduh).



Neka je dat dugi strujni provodnik sa strujom I u blizini neke feromagnetne ravni. (vidi sliku.) Magnetne linije polja, u bližoj okolini provodnika biće koncentrični krugovi, a što se više približavamo feromagnetnoj ravni to će se linije magnetnog polja sve više deformisati ali tako da se postavljaju pod pravim uglom u odnosu na ovu površinu.

Posmatrajmo sada dva takva provodnika postavljena u vazduhu na rastojanju koje je dva puta veće od rastojanja provodnika u prvom slučaju. Neka je to rastojanje $2h$. čemu sada posmatrati dva provodnika umjesto jednog koji leži iznad feromagnetne ravni?



Odgovor je sličan onome iz elektrostatike. Naime, u feromagnetnom materijalu indukovaće se magnetno polje, te će u nekoj proizvoljnoj tački u okolini provodnika magnetno polje biti rezultat superpozicije magnetnog polja samog provodnika i magnetnog polja indukovanog u feromagnetiku! Distribucija polja feromagnetika je veoma složena, ali ovo polje možemo ekvivalentirati poljem lika datog provodnika. Valja uočiti da su smjerovi struja u provodnicima isti.

feromagnetika.

Možemo zaključiti: kad god imamo strujne provodnike u blizini feromagnetnih ravni (ploče) ove se namagnetišu stvarajući svoje magnetno polje. Na taj način je magnetno polje iznad ravni rezultantno polje strujnog provodnika i namagnetisanog

1.1.3 Energija stacionarnog magnetnog polja

Iz Pointigove teoreme slijedi: energija magnetne komponente elektromagnetnog polja, u najopštijem slučaju data je sa

$$W_m = \int_V \int_0^B \vec{H} d\vec{B} dV \quad (18)$$

Za linearne sredine (kakva je većina sredina u prirodi) biće

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{H} \vec{B} d\nu \quad (19)$$

Pri čemu se integracija vrši po čitavom onom dijelu prostora ν u kome polje postoji.

Sada iskoristimo relaciju

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (20)$$

Imajući u vidu da je za stacionarno magnetno polje $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ i znajući još da je $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, pa je

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \vec{B} - \vec{A} \vec{J} \quad (21)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) d\nu + \frac{1}{2} \int_v \vec{A} \vec{J} d\nu \quad (22)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_{S_v} (\vec{A} \times \vec{B}) d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{\nu_0} \vec{A} \vec{J} d\nu \quad (23)$$

Prva integracija se vrši po domenu u kome postoji polje (teoretski $S_v \rightarrow \infty$) dok se druga integracija vrši unutar domena ν_0 koji zaprema strujni provodnik. Pošto je $A \sim \frac{1}{r}$, $H \sim \frac{1}{r^2}$ dok je $dS \sim r^2$, tako da prvi integral teži nuli te izraz za energiju magnetnog polja poprima na kraju ovu formu

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\nu_0} \vec{A} \vec{J} d\nu \quad (24)$$

Prednost ovog izraza je u tome što se integracija vrši po konačnom domenu. (Napomenimo ipak da je ova relacija korektna samo za stacionarno magnetno polje.)

Opet je „moguća dilema“, kao i u Elektrostatici, oko toga gdje je locirana energija: u polju ili u provodniku (kako to pokazuje relacija (24)).

Bez velike diskusije i ponavljanja ranije rečenog, a što i ovdje vrijedi, zaključimo: magnetna energija je sadržana u samom polju a ne u izvoru polja.

Na kraju, razmotrimo i specijalni slučaj kada je strujni tok lociran u tankim žičanim provodnicima. Za jedan takav provodnik važi ($d\nu = \Delta S dl$)

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\nu_c} \vec{A} \vec{J} \Delta S dl = \frac{1}{2} \int_{\Delta S} \vec{A} J \Delta S dl = \frac{1}{2} \int_L \vec{A} I dl = \frac{I}{2} \int_L \vec{A} dl = \frac{1}{2} \Phi I \quad (25)$$

Za konačan broj žičanih provodnika

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k I_k \quad (26)$$

Odnosno žičanih kontura koje su međusobno spregnute. Φ_k je ukupan fluks kroz k-tu konturu. On zavisi od k-te struje i flukseva ostalih kontura.

1.1.4 Skalarni magnetni potencijal

Kao karakteristiku magnetnog polja uveli smo magnetni vektorski potencijal \vec{A} , dok smo za električno polje uveli skalarni električni potencijal V .

U principu kod magnetnog polja ne možemo uvesti skalarni magnetni potencijal iz prostog razloga što je magnetno polje vrtložnog karaktera, tj

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (27)$$

Međutim, u dosta čestim slučajevima kada je u nekom dijelu prostora $\vec{J} = 0$ slijedi i $\text{rot } \vec{H} = 0$, te za sve tačke van strujnog provodnika važi

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (28)$$

(C ne obuhvata nikakav strujni provodnik). U tim djelovima prostora, očigledno, moguće je uvesti skalarni magnetni potencijal, kao dodatnu karakteristiku magnetnog polja i to potpuno analogno skalarnom električnom potencijalu u Elektrostatici. Dakle,

$$\vec{H} = -\text{grad } V_m \quad (29)$$

gdje je V_m - skalarni magnetni potencijal.

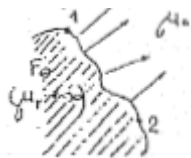
Koristeći analogiju sa elektrostatičkim poljem, uvodimo magnetni napon kao

$$V_{m1} - V_{m2} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{l} ; V_m (=) A \text{ (Amper)} \quad (30)$$

Dalja analogija sa Elektrostatikom daje i relacije

$$\text{div } \vec{H} = 0, \text{ a odatve} \quad (31)$$

$$\Delta V_m = 0 \quad (32)$$



Linije magnetnog polja iz feromagnetika sa velikim koeficijentom μ u sredinu sa malim koeficijentom permeabilnosti izlaze pod pravi uglom. Naime,

$$H_t = 0 \quad (33)$$

$$V_{m1} - V_{m2} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{l} = \int_1^2 H_t dl = 0 \quad (34)$$

$$V_{m1} = V_{m2} = \text{const} \quad (35)$$

Dakle, površina feromagnetika odnosno feromagnetik u cjelini ima konstantan magnetni potencijal (opet analogija sa Elektrostatikom).

Uvođenje skalarnog magnetnog potencijala je sasvim opravdano budući da se na taj način raspodjela magnetnog polja dobija na jednostavan način (pogotovo ako se ima u vidu analogija sa Elektrostatikom).

Pri tome ne treba zaboraviti da je uvođenje skalarnog električnog potencijala opšteg karaktera, dok je uvođenje skalarnog magnetnog potencijala V_m moguće samo u djelovima prostora van strujnih provodnika!

Korist od uvođenja ovog pojma može se vidjeti sa ovog primjera.

Primjer:

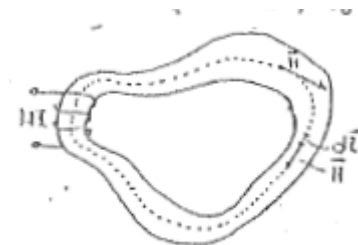


$$\vec{E}_{un} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 \Rightarrow (\text{analogijom}); \vec{H}_{un} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0 \quad (36)$$

1.1.5 Magnetna kola

Pod magnetnim kolima podrazumijevamo skup magnetnih sredina kojima kanališemo magnetni fluks odnosno magnetno polje. Kanalisanjem magnetnog toka određenim putem odnosno domenom cilj nam je da izbjegnemo njegovo rasipanje na tom putu. Dakle, uloga magnetnog kola je u osnovu ista kao i električnog (koje, kao što smo vidjeli, ima za cilj da kanališe strujni tok). Jedna od bitnih razlika između ovih dvaju vrsta kola jeste u tome što kod električnih kola imamo stvarno kretanje (i to kretanje elektriciteta) dok kod magnetnog kola imamo „usmjeravanje pobuđenosti“.

A.) Neka je zadato proizvoljno prosto magnetno kolo promjenjivog poprečnog presjeka i neka se magnetni fluks ostvaruje sistemom strujnih navojaka kroz koje protiče struja I . Pretpostavićemo da je sav fluks kanalisani kroz presjek kola, tj da nema rasipanja fluksa.



Uočimo jednu liniju magnetnog polja (srednju). Magnetno polje \vec{H} je tangentno na tu liniju. Primijenimo Amperov zakon na tu liniju.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = NI \quad (37)$$

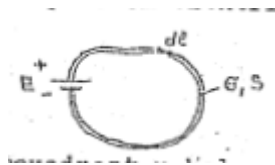
Pošto smo za liniju (odnosno konturu) C uzeli liniju magnetnog polja, element linije $d\vec{l}$ je kolinearan sa poljem \vec{H} , te je Amperov zakon dat sa

$$\oint_C H dl = NI ; H = \frac{B}{\mu} \text{ za linearne sredine, te je} \quad (38)$$

$$\oint_C \Phi \frac{1}{\mu S} dl = NI \quad (39)$$

Kako nema rasipanja to je Φ isto u svakom presjeku, tj $\Phi = const$, pa je

$$\Phi = \frac{NI}{\oint_C \frac{1}{\mu S} dl} \quad (40)$$



A sada se, za trenutak, vratimo prostom električnom kolu. Za struju u ovom kolu smo imali da je:

$$I = \frac{E}{\oint_C \frac{1}{\sigma S} dl} \quad (41)$$

Gdje je E - ems izvora, dok je σ - provodnost provodnika kola.

Nije teško uočiti veliku formalnu sličnost posljednjih dviju relacija. Ova sličnost nam daje za pravo da kažemo da:

- Struji I u električnom kolu odgovara fluks Φ u magnetnom kolu;
- Elektromotornoj sili E u električnom kolu odgovara veličina NI (magnetnomotorna ili magnetnopobudna sila F) u magnetnom kolu;
- Električnoj provodnosti σ odgovara magnetna permeabilnost μ .

Veličina u imeniocu izraza za magnetni fluks

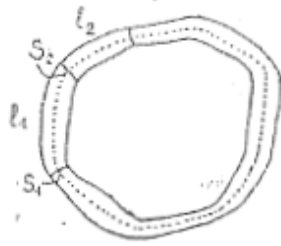
$$\oint_C \frac{1}{\mu S} dl \quad (42)$$

Naziva se magnetna otpornost R_m ; u slučaju $\mu = const$ i $S = const$ ona se svodi na oblik

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{1}{S} \oint_C dl = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S}, \text{ te je} \quad (43)$$

$$\Phi = \frac{F}{R_m} \quad (44)$$

B.) Ako je prosto kolo (dakle, kolo bez čvorišta) sastavljeno od niza djelova različitog poprečnog presjeka i materijala, onda imamo



$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = NI, \text{ odnosno (svođenjem na srednje linije)} \quad (45)$$

$$\sum_{k=1}^N H_k l_k = NI \quad (46)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{B_k}{\mu_k} l_k = NI \quad (47)$$

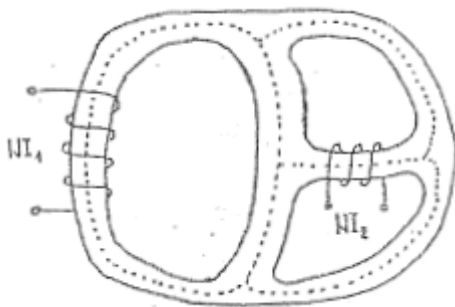
$$\sum_k \Phi_k \frac{1}{\mu_k} \frac{l_k}{S_k} = NI \quad (48)$$

$$\sum_k \Phi_k R_{mk} = NI ; \Phi_k = const \quad (49)$$

$$\Phi_k = \frac{NI}{\sum_k R_{mk}} \quad (50)$$

Analogija sa Omovim zakonom je gotovo potpuna.

C.)



Posmatrajmo sada složeno magnetno kolo. Ako kroz ma koju granu ovakvog kola uočimo srednju liniju i na nju primijenimo zakon o cirkulaciji vektora \vec{H} dobićemo

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k R_{mk} = (NI)_{ob} \quad (51)$$

Pri čemu izraz na desnoj strani ulazi sa algebarskim znakom. Sličnost sa II Kirhofovom zakonom je evidentna $\sum I_k R_k = \sum \varepsilon$, pa se veličina

$$\Phi_k R_{mk} = H_k l_k \quad (52)$$

Zove pad magnetnog napona ili magnetnootporna sila.

Za smo čvorište, gdje se susstiče više flukseva, primjenjuje se zakon o konzervaciji magnetnog fluksa

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \text{ odnosno } \oint_S d\Phi = 0 \quad (53)$$

Ako se, međutim, dotok (ili otok) fluksa vrši po konačnom broju kanala onda je

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k = 0 \quad (54)$$

Pri čemu je suma na lijevoj strani algebarska. Ova relacija je analogna sa onom za I. Kirhofov zakon ($\sum_k I_k = 0$).

Gore navedeni izrazi zovu se I. i II. Kirhofov zakon za magnetno kolo, odnosno Kap-Hopkinsovi zakoni.

Možemo slobodno konstatovati da između električnih i magnetnih kola postoji gotovo potpuna formalna analogija, pa otuda su i postupci rješavanja isti. Pri tome je važno imati na umu da je sva prethodna analiza izvedena pod uslovom da je

$$\mu = const ! \quad (55)$$

Drugim riječima, izvedeni zakoni važe samo za linearna magnetna kola.

D.) I pored velike sličnosti električnih i magnetnih kola potrebno je istaći i njihove međusobne bitne razlike. Od svih razlika dvije su najbitnije i to:

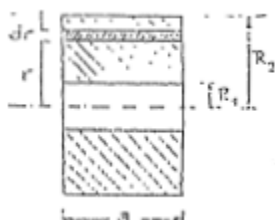
1. Kod električnih kola praktično nemamo nikada rasipanja (struje), zato što se ova kola grade u praksi od veoma dobrih provodnika (σ je vrlo veliko) koji su postavljeni u veoma dobrim dielektricima (čije $\sigma \rightarrow 0$; u praksi postoji veliki broj ovakvih materijala).

Međutim, kod magnetnih kola rasipanje fluksa ima uvijek značajnu vrijednost, čak i onda kada je svedeno na najmanju mjeru! Iz izraza za magnetni otpor

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S} \quad (56)$$

Slijedi da je ovaj otpor najveći kada je $\mu = \mu_0 = \mu_{\min}$. Znači, ni u principu magnetni otpor ne može da teži beskonačnosti! Ovako, u stvarnosti, značajan broj linija fluksa se rasipa kroz okolnu sredinu.

2. Električna kola se uvijek sačinjavaju od tankih žičanih provodnika (dužina im je uvijek mnogo veća od dimenzija poprečnog presjeka) te se mogu smatrati linijskim provodnicima. Međutim, magnetna kola se u praksi skoro uvijek grade tako da su im dimenzije poprečnog presjeka uporedive sa dužinom, tj ne mogu se smatrati linijskim elementima. A prethodno



navedene relacije izvedene su pod pretpostavkom da je magnetno kolo linearno i da nema rasipanja fluksa. Da li su onda ove relacije tačne i za realna kola?

Odgovor ćemo dobiti kroz analizu jednog ovakvog praktičnog problema. Neka je dat torus sa podacima kao na slici. Izračunajmo magnetni fluks Φ na dva načina:

I. Način:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS ; H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (57)$$

$$\Phi = \int \mu \frac{NI}{2\pi r} \cdot a \cdot dr = \mu \frac{NIa}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (58)$$

Ovo je tačna vrijednost za fluks u poprečnom presjeku torusa. Označimo je sa Φ_t . Primijenimo sada Kap-Hopkinsov zakon (ali koristeći srednju liniju), dobićemo

$$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} \frac{2\pi(R_1+R_2)}{2}} = \frac{\mu NIa}{2\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \quad (59)$$

Ovo je približna vrijednost. Označimo je sa Φ_p .

Označimo $\frac{R_2}{R_1} = x$, te je

$$\Phi_t = \mu \frac{NIa}{2\pi} \ln x \quad (60)$$

$$\Phi_p = \frac{NIa}{2\pi} \frac{x-1}{x+1} \quad (61)$$

x	1,5	2	3	4	5
$\frac{2\pi}{\mu NIa} \cdot \Phi_p$	0,405	0,693	1,098	1,386	1,609
$\frac{1}{\mu NIa} \cdot \Phi_t$	0,400	0,666	1,000	1,200	1,333
$\frac{\Phi_p - \Phi_t}{\Phi_t} \cdot 100\%$	1,36%	3,89%	8,9%	13,4%	17,1%

Iz tabele je vidljivo da je, čak i za „debele“ toruse, zadovoljavajuća tačnost po približnom obrascu.

Zaključak: bez obzira što realna magnetna kola nijesu linijska, Kap-Hopkinsovi zakoni se mogu primijeniti sa velikom tačnošću u inženjerskoj praksi, bez bojazni da pravimo veliku grešku. Dakle, realna magnetna kola se ipak mogu smatrati linijskim.

1.1.5.1 Rješavanje prostih nelinearnih magnetnih kola

A. U praksi se magnetna kola gotovo nikada ne rade od linearnih sredina! Ona se grade gotovo uvijek od feromagnetnih sredina iz prostog razloga što je za takve sredine μ_r veoma veliko (te je magnetni otpor veoma mali)!

Feromagnetici su, u magnetnom pogledu **nelinearne** sredine, što će reći da je $\mu \neq const$, i to je jedna **vrlo složena funkcija od polja** \vec{H} , tj

$$\mu = \mu(H) \quad (62)$$

Razumije se da ovo jako otežava proračun magnetnih kola, jer, da bi direktnom primjermom Kap-Hopkinsovih zakona odredili H (a time i B), moramo prethodno poznavati otpor svakog dijela magnetnog kola, a magnetni otpor ne možemo izračunati bez poznavanja permeabilnost μ . Međutim, kako je μ u funkciji od H (a H je nepoznato) proizilazi da direktna primjena Kap-Hopkinsovih zakona ne omogućava rješavanje stvarnih a to znači nelinearnih magnetnih kola (čak ni prostih, a kamoli složenih)!

U magnetnom pogledu sve supstance u prirodi se dijele u 3 klase:

- **Dijamagnetici** - to su supstance kod kojih je μ_r nešto manje od jedinice (negdje oko 0,999); tu spadaju: voda, aluminijum, itd.
- **Paramagnetici** – supstance čiji je μ_r nešto veći od jedinice, tu spada i bakar.

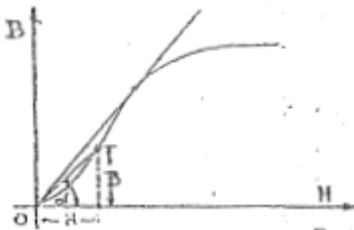
Većinu supstanci u prirodi, u magnetnom pogledu, čine dijamagnetici i paramagnetici. One se ponašaju, u magnetnom pogledu, kao i vazduh.

- **Feromagnetici** – supstance čije je $\mu_r \gg 1$; tu spadaju: gvožđe, kobalt, niki i njihove legure. U ovoj klasi μ_r može da ima vrijednost 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, dakle, njihov magnetni otpor $R_m \rightarrow$ vrlo malim vrijednostima.

Vratimo se ponovo na problem rješavanja nelinearnih magnetnih kola i još jedanput istaknimo da problem njihovog rješavanja potiče od nelinearnosti funkcije

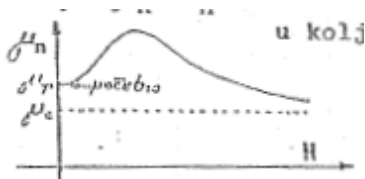
$$\mu = \mu(H) \quad (63)$$

Što je svojstveno samo feromagneticima. tako, na primjer, kriva magnećenja ovih supstanci je nelinearna i izgleda kao na slici. Za tipične feromagnetike indukcija zasićenja iznosi negdje oko 2T.



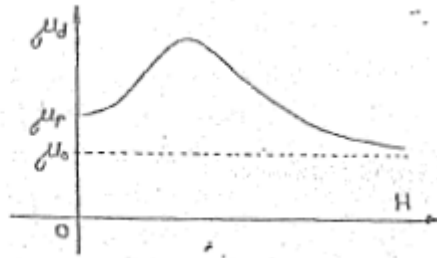
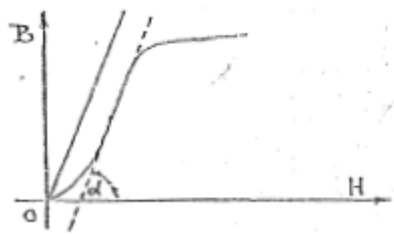
Permeabilnost ovih supstanci, kao složena funkcija, može se odrediti sa krive magnećenja. Razlikujemo dvije vrste permeabilnosti: normalnu i diferencijalnu. Evo kako se one definišu:

1. $\mu = \mu_n = \frac{B}{H} = \text{tg } \alpha$. Najveće μ_n je na početku zasićenja, tj u koljenu karakteristike.



2. $\mu_d = \frac{dB}{dH}$. Najveći ugao α , te otuda i najveće μ_d je na linearnom dijelu karakteristike.

KLJEŠU KGLJAGGLISGLU.



Oblik krive diferencijalne permeabilnosti sličan je obliku krive normalne permeabilnosti, samo što su im maksimumi pomjereni.

Kada ćemo koristiti jednu a kada drugu permeabilnost?

μ_n se koristi kao karakteristika kod nepromjenljivih polja;

μ_d se koristi kada imamo stalnu promjenu polja (naizmjenična)

Kao što smo na samom početku istakli, problem rješavanja nelinearnih magnetnih kola sastoji se u tome što nemamo analitički izraz za krivu magnećenja. Naime, Fizika, ni do današnjeg dana, nije uspjela da utvrdi analitički izraz za krivu magnećenja na osnovu tretiranja fizičkih procesa u feromagnetima. Jer, kada bi imali ovaj analitički izraz problem rješavanja nelinearnih kola bio bi moguć direktno analitički.

Postoji, međutim, mogućnost da se ova kriva aproksimira nekim analitičkim izrazom. U literaturi postoji dosta takvih izraza. Jedan od boljih je i takozvana Frojlih-ova kriva, koja ima ovakav izraz:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{H}{a+bH}, & H > 0 \\ B &= \frac{H}{a+b|H|}, & H < 0 \end{aligned} \right\} \text{ a, b – parametri krive} \quad (64)$$

Ova kriva vrši aproksimiranje na osnovu samo dva podatka i to: indukcije zasićenja B_s i početne vrijednosti μ_p diferencijalne permeabilnosti. Koeficijente a i b izračunavamo ovako:

- Kad $H \rightarrow \infty$ slijedi $B = \frac{1}{b} = B_s$, a odavde

$$b = \frac{1}{B_s} \quad (65)$$

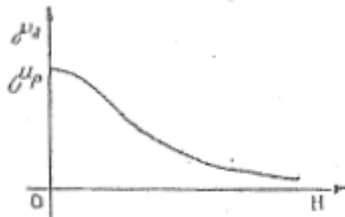
- Kad $H \rightarrow 0$ iz

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = \frac{a+bH-bH}{(a+bH)^2} = \frac{a}{(a+bH)^2}, \text{ slijedi} \quad (66)$$

$$\mu_d = \frac{1}{a} = \mu_p, \text{ te je} \quad (67)$$

$$a = \frac{1}{\mu_p} \quad (68)$$

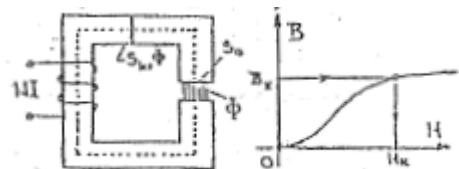
Ova kriva sasvim dobro aproksimira krivu magnećenja, što se ne može reći i za permeabilnost (vidi krivu za μ_d).



U literaturi postoje i druge krive, osim Frojlilove, koje na osnovu više podataka (a ne samo dva) aproksimiraju dobro i krivu magnećenja i krivu permeabilnosti.

B. Postupci rješavanja. Kod prostih nelinearnih magnetnih kola mogu se, u principu, pojaviti dvije klase problema.

I. Klasa: U zadatom prostom kolu (vidi sliku) dat je fluks Φ (odnosno B_0 u međugvožđu) kao i kriva magnećenja. Treba odrediti NI .



Pod pretpostavkom da nema rasipanja, $\Phi = const$ u svakom dijelu kola! Dakle

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k} \quad (69)$$

Za izračunavanje B_k iz krive magnećenja nađemo H_k . Zatim,

$$B_0 = \frac{\Phi}{S_0} \Rightarrow H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (70)$$

Sa izračunatim vrijednostima za svako H_k uđemo u Amperov zakon te izračunamo traženo NI

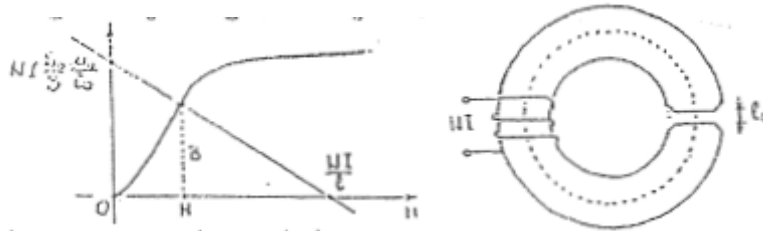
$$\sum_{k=0}^N H_k l_k = NI_{ob} \quad (71)$$

Primjer: neka je izračunato $NI = 1000$ Amperzavoja. Možemo ih ostvariti na više načina: kroz jedan navoj protiče 1000 A; kroz 1000 zavoja protiče 1 A; ili neka druga kombinacija. No, u svakom slučaju treba voditi računa o Džulovi gubicima prije nego se opredijelimo za neku kombinaciju.

II. klasa: obrnut problem. Zadato je NI a traži se fluks Φ u kolu kojeg stvara zadati NI .

Ovaj problem je mnogo složeniji i javlja se u tri mogućnosti.

(A) Neka je dato kolo, kao na slici, načinjeno od istog materijala, konstantnog je poprečnog presjeka i ima međugvožđe. Znači, dato je NI , kriva magnećenja i geometrija kola. Naći fluks Φ u kolu.



Primjena Amperovog zakona daje

$$Hl + H_0 l_0 = NI \quad (72)$$

$$Hl + \frac{B_0}{\mu_0} l_0 = NI ; BS = B_0 S_0 \Rightarrow B_0 = \frac{BS}{S_0} \quad (73)$$

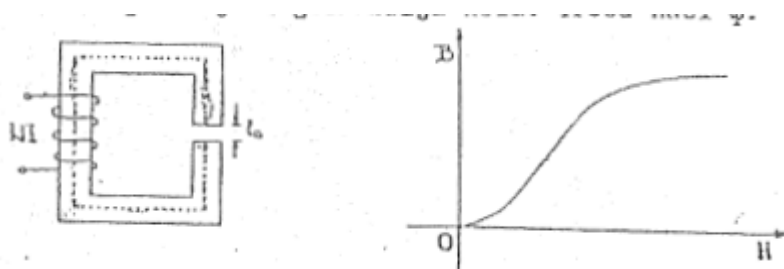
$$\frac{BS}{S_0} \frac{l_0}{\mu_0} = NI - Hl \quad (74)$$

$$B = NI \frac{S_0 \mu_0}{S l_0} - \frac{S_0 l}{S l_0} \mu_0 H \quad (75)$$

Relacija (75) predstavlja jednačinu pravca. Ovaj pravac se konstruiše u istom koordinatnom sistemu u kome je snimljena i kriva magnećenja. U presjeku pravca sa krivom nalazimo vrijednost indukcije B . Time je automatski određen i fluks u kolu Φ .

U rješavanju postavljenog problema poslužili smo se grafoanalitičkom metodom. Isti problem se, međutim, može riješiti i analitički koristeći Frojlihovu krivu odnosno relaciju. (Eliminišemo H iz relacije (75) i uvrstimo ga u Frojlihovu relaciju. Tako se dobija kvadratna jednačina po S . Ona će dati dva rješenja od kojih je samo jedno realno i to ono čija vrijednost ne prelazi B_s .)

(B) U ovom slučaju prosto magnetno kolo se sastoji iz više djelova različitog poprečnog presjeka i od različitih materijala. Poznato je NI , kriva magnećenja i geometrija kola. Treba naći Φ .



Kako u svakom dijelu kola indukcija B ima različitu vrijednost to prethodni način rješavanja nije više primjenljiv. Amperov zakon glasi

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_0 l_0 = NI \quad (76)$$

U ovom slučaju koristićemo metod uzastopnih aproksimacija. Naime, iako je otpor ovakvog kola dat sa

$$R_m = R_{m0} + \sum_{k=0}^N R_{mk} \quad (77)$$

Mi ćemo u prvoj aproksimaciji pretpostaviti da je

$$R_m = R_{mo} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_0}{S_0} \quad (78)$$

I sa ovakvom vrijednošću otpora u kolu naći Φ aproksimativno, tj

$$\Phi_{ap} = \frac{NI}{R_{mo}} \cdot (\Phi_{ap} > \Phi_{stvarno}) \quad (79)$$

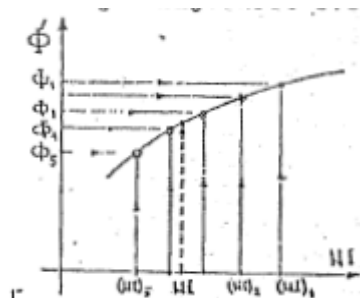
Zatim usvojimo neku vrijednost za fluks, recimo Φ_1 , koja će biti nešto manja od Φ_{ap} . Sa ovom vrijednošću za fluks nađemo indukciju B_k u svakom dijelu kola, dakle

$$B_k = \frac{\Phi_1}{S_k} \text{ i } B_0 = \frac{\Phi_1}{S_0} \Rightarrow H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (80)$$

Za svako B_k očitamo odgovarajuće H_k iz krive magnećenja. Od očitanih vrijednosti H_k i izračunate vrijednosti H_0 načinimo sumu

$$\sum_{k=0}^N H_k l_k \text{ i} \quad (81)$$

Neka je vrijednost ove sume $(NI)_1$. Sa vrijednostima Φ_1 i $(NI)_1$ u dijagramu Φ, NI konstruišemo prvu tačku. (vidi sliku).

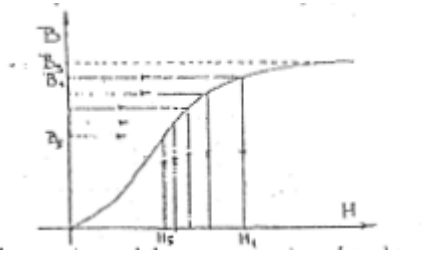
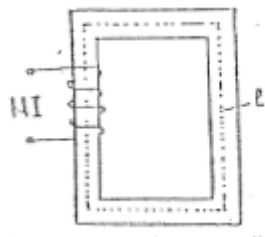


Potpuno isti postupak provedemo sa nekom drugom usvojenom vrijednošću za fluks, na primjer Φ_2 , pri čemu je naravno

$$\Phi_2 < \Phi_1 (< \Phi_{ap}) \quad (82)$$

Dobijenu tačku $[(NI)_2, \Phi_2]$ unesemo u pomenuti dijagram. Tako redom za tačke , $[(NI)_3, \Phi_3]$ $[(NI)_4, \Phi_4]$, $[(NI)_5, \Phi_5]$, ... Kroz dobijene tačke konstruišemo krivu. Na krivoj nađemo tačke čija je apscisa već poznata i iznosi NI . Ordinata ove tačke daje traženu vrijednost fluksa.

(C) Zadato je kolo kao i u prethodnom slučaju s tom razlikom što sada nema vazdušnog procjepa. Poznato je NI , kriva magnećenja i geometrija kola. Treba opet naći fluks (odnosno indukciju).



Pošto u kolu nema vazdušnog procjepa to nijesmo u stanju da izračunamo ni Φ_{ap} ! Međutim, poznata nam je jedna druga činjenica: koliko god da je velika vrijednost indukcije u kolu ona ipak ne premašuje vrijednost indukcije zasićenja B_s ! To će nam poslužiti za početni korak.

Dakle, u kolu je sigurno

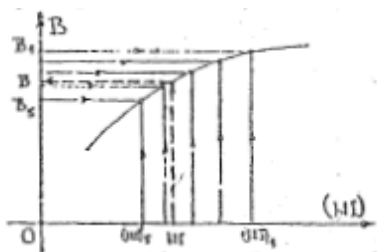
$$B \leq B_s \quad (83)$$

Iako je B nepoznato. A sada odaberimo za B neku vrijednost, na primjer B_1 , ali tako da je B_1 nešto manje od B_s . Za tako odabranu vrijednost indukcije, sa krive magnećenja, očitamo odgovarajuće H_1 . A zatim po Amperovom zakonu proračunamo $(NI)_1$, tj

$$H_1 l = (NI)_1 \quad (84)$$

(Srednja linija u kolu l se ne mijenja, a prečutno smo pretpostavili da su svi poprečni presjeci u kolu isti radi jednostavnijeg izračunavanja $(NI)_k$.)

Čitav ovakav postupak se provede sa još nekoliko vrijednosti za indukciju B . dobijene tačke $[B_k, (NI)_k]$ unesemo u koordinatni sistem čija je apscisa (NI) , a ordinatna osa B .



Šematski prikaz samog postupka:

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_1 < B_s & \rightarrow & H_1 & \rightarrow & (NI)_1 & & \\
 B_2 < B_1 & \rightarrow & H_2 & \rightarrow & (NI)_2 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 B_5 < B_4 & \rightarrow & H_5 & \rightarrow & (NI)_5 & &
 \end{array} \quad (85)$$

Pomoću unešenih tačaka se konstruiše kriva. Zatim, za vrijednosti (NI) dato u zadatku, odredimo odgovarajuće B , pomoću koga je lako odrediti fluks u kolu.

U svim dosadašnjim razmatranjima proučavali smo samo prosta magnetna kola (nelinearna).